**ממ"ן 11 אלגוריתמים**

**שאלה 1**

א.

צריך להוכיח שאם כל הצלעות ב Ps,vשימושיות אז Ps,v מזערי.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על אורך המסלול שנסמנו בL,

**אם L=1**

אז ב Ps,vיש רק צלע אחת (s,v) והיא שימושית לכן היא צלע אחרונה במסלול מזערי שנסמנו P's,v. נניח בשלילי ש P שונה מP' זה אומר שP' בנוי ממעגל (שיוצא מS וחוזר אליו) בתוספת הצלע (s,v), נתון שכל המשקלים חיוביים לכן משקל המעגל חיובי (בהכרח גדול מ0) ובהכרח וקיבלנו סתירה לכך שP' מזערי.

**אם הטענה מתקיימת לכל L<n אז עבור L=n**

הצלע האחרונה בPs,v שנסמנה (u,v) היא שימושית לכן היא צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהוא P's,v. נסמן ב P's,uאת הרישא של P's,v מ- s ל-u (כלומר בלי הצלע האחרונה (u,v)) ונקבל W(P's,v) = W(P's,u) + W((u,v)), בצורה דומה נסמן בPs,u את הרישא של Ps,v מ-s ל- u (כלומר בלי הצלע האחרונה (u,v)) ונקבל W(Ps,v)= W(Ps,u) + W((u,v)).

האורך של Ps,u הוא n-1 (הורדנו רק צלע אחת מPs,v) וכל הצלעות שלו שימושיות (שייכות גם לPs,v) ולפי הנחת האינדוקציה Ps,u מזערי לכן ונקבל

ו P's,vלכן בהכרח גם Ps,v מזערי.

\* נשים לב שאם s=v (L=0) משקל המסלול הוא 0 ואז הוא בהכרח מזערי כי כל לכ צלעות הגרף יש משקל חיובי.

ב.

נניח שיש ב Ps,v צלע לא שימושית (w,u), נסמן ב Ps,uאת הרישא של Ps,vמ- s ל- u, Ps,u לא מזערי (כי הצלע האחרונה שלו לא שימושית) לכן בהכרח קיים מסלול P's,u שמתחיל בs ונגמר בu והצלע האחרונה שלו היא לא (w,u) ומקיים .

נסמן ב Pu,vאת הסיפא של Ps,vמ- u ל- v, נסמן ב P's,v את איחוד המסלולים P's,u ו- Pu,v ונקבל וקיבלנו ש Ps,v איננו מסלול מזערי.

ג.

יהי מסלול כמעט מזערי, נניח בשלילה שכל הצלעות בו שימושיות,לפי סעיף א' מזערי וקיבלנו סתירה לכך שהוא כמעט מזערי (לפי הגדרה מסלול כמעט מזערי הוא לא מזערי) לכן קיבלנו שב מופיעה צלע לא שימושית ונשאר להוכיח שהיא יחידה.

נניח בשלילה שב יש שתי צלעות לא שימושיות שונות שנסמנן (1w1,u) ו(2w2,u) כך ש- (1w1,u) מופיעה מוקדם יותר במסלול.

נסמן ב Ps,u1את הרישא של Ps,vמ- s ל- u1 וב Pu1,vאת הסיפא של Ps,vמ- u1 ל- v, לפי סעיף ב' המסלולים , ו אינם מזעריים (בשלושתם יש צלעות לא שימושיות).

אינו מזערי מה שאומר שקיים מסלול מ- u1 ל- v כך ש , נסמן ב את איחוד המסלולים ו- ונקבל

, בנוסף גם הוא אינו מזערי לפי סעיף ב' ( Ps,u1רישא שלו ויש שם את הצלע הלא שימושיות (1w1,u)) וקיבלנו סתירה לכך ש כמעט מזערי.

ד.

נתון ש- היא הצלע הלא שימושית היחידה במסלול לכן כל השאר הצלעות במסלול הן שימושיות כלומר הרישא מ-s ל- u1 והסיפא מ- u2 ל- v שלא מכילות את מורכבות רק מצלעות שימושיות ולכן לפי סעיף א' הן מהוות מסלול מזערי.

ה.

נציג בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקודקוד נתון s לקודקוד יעד נתון t:

האלגוריתם:

1. נמצא מסלולים מזעריים מ-s בעזרת האלגוריתם של דייקסטרה, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
2. נהפוך את כיוון הצלעות בגרף (כדי שנוכל למצוא את המסלולים המזעריים של t שמהווים סיפות מזעריות של מסלולים מs לt)
3. נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת מסלולים מזעריים מ-t, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
4. נהפוך את כיוון הצלעות בגרף בחזרה (לכיוונם המקורית).
5. עבור כל צלע e=(u,v) בגרף:
   1. אם e היא לא שימושית (יש לנו את המידע הזה משורות 1 ו3 ) נבדוק האם

זה המרחק המינימלי שנמצא עד כה. אם כן- נשמור את המסלול (מכיל מסול מזערי מ-s לu, מסלול מזערי מv לt ואת e צלע לא שימושית אחת).

1. נחזיר את המסלול שקיבלנו.

נכונות:

בשורות 1 עד 4 נעזרנו באלגוריתם של דייקסטרה (שנכונותו כבר מוכחת) למציאת מסלולים מזעריים מs ומסלולים מזעריים לt ונעזרנו בסעיף ב' (ליתר דיוק בשלילתו) בשביל לשמור את כל הקשתות במסלולים אלה כשימושיות.

בלולאה בשורה 5 בדקנו רק מסלולים בעלי צלע לא שימושיות את בדיוק כי לפי סעיף ג' מסלולים כמעט מזעריים חייבים לקיים תכונה זו.

זמן ריצה:

האלגוריתם של דייקסטרה רץ פעמיים וזמן הריצה שלו הוא .

היפוך הצמתים בגרף מתבצע פעמיים וזמן הריצה שלו הוא .

המעבר על הגרף וביצוע מספר סופי של פעולות לכל צלע מתבצע בזמן ריצה של .

לכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא: כנדרש.

**שאלה 2**

רעיון האלגוריתם: לאחר הסרת הקשת e\* העץ T יתפצל לשני רכיבי קשירות, נחפש את הקשת בעלת המשקל המינימלי שמחברת בין רכיבי הקשירות הללו ואז נוסיף אותה לT והוא יהפוך שוב לעץ פורש מינימלי.

האלגוריתם:

1. ניצור עץ T' שזהה לT.
2. נמחק מT' את הצלע e\*= (v, w)
3. נריץ אלגוריתם BFS בעץ T' על הצומת w בשביל לקבל את רכיב הקשירות שלה.
4. נעבור על כל אחת מהצלעות ב-G’ שמקושרות לקודקודים של רכיב הקשירות
   1. אם הצלע הנוכחית נכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי שנמצא עד כה נסמנה ב- e’.
5. נוסיף את הצלע e’ ל-T' ובכך T' יהיה עץ פורש מינימלי.

הוכחת נכונות:

לפי עמודים 23-24 במדריך הלמידה מחיקת צלע מעץ הופכת אותו ללא קשיר לכן מחיקת הצלע e\*= (v, w) מהעץ הנתון בשורה 2 מפצלת אותו לשני רכיבי קשירות שונים.

נסמן בתור S את קבוצת הקשירות של w (שאותה אנו מוצאים בשורה 3 בעזרת BFS), נסמן בT1 את התת עץ של T שפורש את S ובT2 את התת עץ של T שפורש את (V-S).

הקבוצות S ו-(V-S) אינן ריקות (S מכילה לפחות את w ו(V-S) מכילה לפחות את v) ולכן על פי משפט 4.17 (עמוד 157 בספר) הקשת בעלת העלות המינימלית שמחברת בין 2 הקבוצות הללו חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימלי של G', את קשת זו אנו מוצאים בלולאה בשורה 4 ומסמנים כe'.

נניח בשלילה שהעץ שמתקבל בסוף האלגוריתם (לאחר הוספת e' בשורה 5) אינו עץ פורש מינימלי בG', בהכרח קיים עץ פורש מינימלי אחר כך ש מה שאומר ש או .

נניח בלי הגבלת הכלליות שהתנאי מתקיים עבור T1 כלומר

ו- ונסמן .

וקיבלנו סתירה לכך שT עץ מינימלי בG.

קיבלנו שT' שמתרבל בסוף האלגוריתם הוא עץ פורש מינימלי בG'.

חישוב זמן ריצה:

שורות 1, 2 ו- 5 בעלות זמן ריצה קבוע.

זמן הריצה של סריקת העץ ע"י אלגוריתם BFS בשורה 3 הוא .

זמן הריצה של מעבר על הצלעות בשורה 4 הוא .

נתון שהגרף קשיר לפי טענה בספר בגרף קשיר מתקיים וקיבלנו שזמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא כנדרש.

**שאלה 3**

דוגמא לנוסחת 3-CNF ספיקה שהאלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת:

כך ש:

נוסחה זו ספיקה, למשל ההשמה *,*  מספקת אותה.

האלגוריתם החמדן יבחר השמות שממקסמות את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות, נראה את דרך עבודתו בטבלה:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **פסוקיות לא מסופקות שנשארו** | **בחירת האלגוריתם** | **פסוקיות מסופקות חדשות עבור F** | **פסוקיות מסופקות חדשות עבור T** | **משתנה** |
|  | T |  |  |  |
|  | T |  |  |  |
|  | T |  |  |  |
|  | ? | אין | אין |  |
|  | ? | אין | איו |  |

כשהאלגוריתם מגיע למשתנים ו הוא לא מוצא פסוקיות חדשות שהוא יכול לספק אבל זה לא משנה איזה ערכים הוא שם עבורם כי הוא הציב ואז בהכרח הפסוקית לא מסופקת וההשמה של האלגוריתם לא מספקת את .

**שאלה 4**

יהי עץ בינרי לחלוטין T עם n צמתים בעומק d. לכל עלה בעץ נסמן את עומקו ב ונגדיר לו שכיחות בהתאם : .

נראה ע"י אינדוקציה על עומק העץ d שלסדרת השכיחויות יש עץ הופמן שזהה לT:

עבור d=0

עומק העץ הוא 0 לכן יש בו עלה אחד שהוא השורש וסדרת השכיחויות היא , עץ הופמן של סדרה הוא גם בעל עלה אחד שהוא השורש כלומר הוא זהה לT.

נניח שהטענה נכונה עברו d=k ונראה שהיא מתקיימת עבור d=k+1:

העומק של T הוא k+1 לכן קיימת לפחות צומת אחד u כך ש d(u) = k+1 ולפי טענה 4.30 בעמוד 185 בספר יש לu אח v שהוא גם עלה כך ש d(v) =d(u) = k+1.

ניצור עץ חדש T' שזהה לT,

כל עוד קיים צומת u בקבוצת הצמתים של T’, כך ש : d(u) = k+1:

1. נמצא את אחיו של של u, v מתוך קבוצת הצמתים של T’, ונציב באב שלהן את סכום השכיחויות של הצמתים: .
2. נמחק את העלים u ו- v מהעץ T'

כל האבות של האחים שמצאנו הם בעומק k (מכיון שבניהם היו בעומק k+1) והשכיחות שלהם היא (בהתאם לסדרת השכיחויות ) כלומר קיבלנו עץ בינרי לחלוטין בעומק k שמקיים את סדרת השכיחויות ולפי הנחת האינדוקציה קיים עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו שזהה ל T’.

כעת נבנה מ-T’ בחזרה את T המקורי ע"י כך שנפצל את כל הצמתים בT' שנוצרו ב i לעלים המקוריים שבנו אותם (u ו- v) ונקבל בהתאם עץ הופמן תקין שהוא בעצם T.